1. Introdução

Se o modelo probabilístico envolver mais do que um atributo será necessário generalizar o conceito de variável aleatória passando-se de

$$\omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in \Re$$

para

$$\omega \in \Omega \quad \rightarrow \quad \left(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_k(\omega)\right) \in \Re^k$$

isto é utiliza-se a variável aleatória *k*-dimensional $(X_1, \ldots, X_k)$.

O estudo centrar-se-á nas variáveis aleatórias bidimensionais.

2. Variáveis aleatórias bidimensionais

- **Simplificação:** Em vez de (X_1, X_2) emprega-se (X, Y)

- **Definição 4.1 – Variável aleatória bidimensional**

  Uma v.a. bidimensional, (X, Y), é uma função com domínio Ω e com contradomínio em $\Re^2$, $(X, Y): \omega \in \Omega \quad \rightarrow \quad \left(X(\omega), Y(\omega) \right) \in \Re^2$

• **Definição 4.2 – Função de distribuição conjunta**

Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional. A função real de duas variáveis reais, com domínio $\Re^2$, definida por

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y),$$

é a função de distribuição **conjunta** de (X,Y).

• **Simplificação:** Não havendo confusão, escreve-se $F(x,y)$ **em vez de** $F_{X,Y}(x,y)$

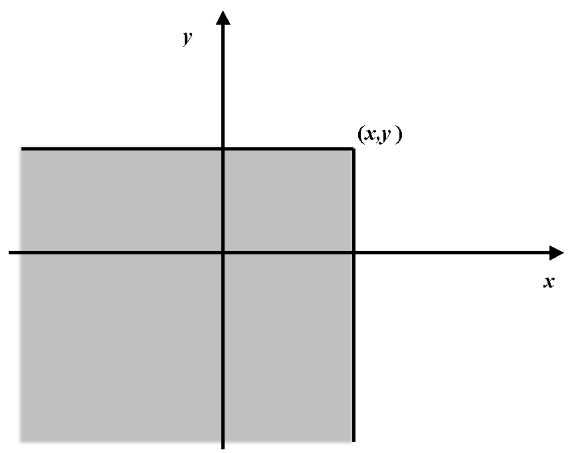


Fig. 4.1 – Região do plano $\Re^2$ definido pelas desigualdades $X \le x$ e $Y \le y$.

- **Propriedades da função de distribuição**

1) $0 \le F(x,y) \le 1$.

2) F é não decrescente, separadamente, em relação a x e em relação a y.

3) Para qualquer função de distribuição $F(x,y)$,

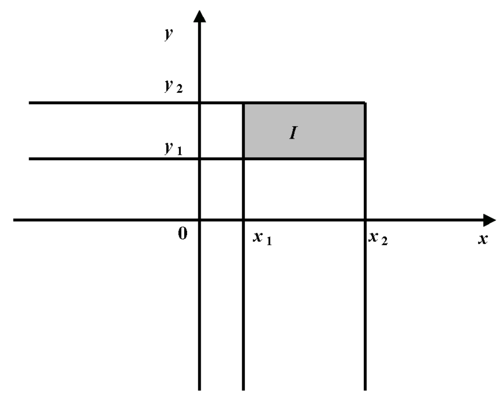
$$F(-\infty, y) = F(x,-\infty) = 0,\ F(+\infty,+\infty) = 1.$$

4) Considere-se o rectângulo I de $\Re^2$ (fig 3.17) com vértices nos pontos,

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_1),\ (x_1, y_2),\ (x_2, y_2),\quad I = \{(x,y) : x_1 < x \le x_2,\ y_1 < y \le y_2\}.$$

Então

$$P(I) = P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1)$$
$$+ F(x_1, y_1)$$



5) Qualquer função de distribuição F é contínua à direita em relação a x e em relação a y,

$$F(x+0, y) = F(x, y),\ F(x, y+0) = F(x, y).$$

- **Exemplo -** Cálculo de probabilidades utilizando a função de distribuição

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y} & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \end{cases}$$

$P(2 < X \leq 3; 1 < Y \leq 4) =$ $\qquad$ $P(X \leq 4) =$ $\qquad$ $P(Y > 2) =$

• **Funções de distribuição marginais -** cada variável é considerada de forma isolada

$$P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x,y) = F(x,+\infty) = F_X(x);$$

$$P(Y \le y) = P(X < +\infty, Y \le y) = \lim_{x \to +\infty} F(x,y) = F(+\infty, y) = F_Y(y).$$

A distribuição conjunta determina univocamente as distribuições marginais, **mas a inversa não é verdadeira**. (definição 4.3)

• **Exemplo**:

Calcular as funções de distribuição marginais do exemplo anterior

• **Definição 4.4 – Variáveis aleatórias independentes**

Sejam B_1 e B_2 dois acontecimentos quaisquer tais que B_1 só envolve *X* e B_2 apenas se refere a *Y*. As variáveis aleatórias *X* e *Y* são independentes se e só se,

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1) \times P(Y \in B_2).$$

De forma equivalente: $F(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$ para todo o par (x, y)

- **Teorema 4.1 –** Se X e Y são variáveis aleatórias independentes e se ψ e φ são duas funções então as variáveis aleatórias $U = \psi(X)$, $V = \varphi(Y)$ são também independentes.
  ***Dem.*:** Murteira (2012a).

3. Variáveis aleatórias bidimensionais discretas

- **Definição 4.5 – Variável aleatória bidimensional discreta**
  (X,Y) é variável aleatória bidimensional discreta se e só se X e Y são variáveis aleatórias discretas.

  Dado $D=\{(x,y): P(X=x,Y=y)>0\}$, tem-se $P\left[(X,Y)\in D\right]=1$.

- **Definição 4.6 – Função probabilidade conjunta**
  Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta. A função real de duas variáveis reais, com domínio $\Re^2$, definida por,

$$f_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y),$$

  é a função probabilidade de (X,Y) ou a função probabilidade conjunta das variáveis X e Y.

- Propriedades da função probabilidade conjunta:
  - $\sum_{(x_i, y_j)\in D} f(x, y) = 1$,
  - $P[(X,Y)\in B] = \sum_{(x_i, y_j)\in D\cap B} f(x_i, y_j)$.
  - $F(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i, y_j)$.
- **Definição 4.7 - Função probabilidade marginal**

  Variável aleatória bidimensional (X,Y).

  $F_X \rightarrow$ função de distribuição marginal de X

  $D_X = \{ x :\ P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-0) > 0 \}$, conjunto dos pontos de descontinuidade de F_X.

  função probabilidade marginal de $X \rightarrow f_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{se } x \in D_x \\ 0 & \text{se } x \notin D_x \end{cases}$.

  Facilmente se verifica $f_X(x) = \sum_{y\in D_Y} f(x, y)$

Teorema 4.2 - As v.a. discretas X e Y são independentes se e só se $f(x,y)=f_X(x)\times f_Y(y)$ para todo o par (x,y).

Dem: ver livro

Exemplo 4.2 - Lançamento de dois dados. Sejam ***X***: número de pontos obtido com o primeiro dado e ***Y***: o número máximo de pontos obtido no conjunto dos dois dados. Por exemplo: se sair (1,3) tem-se $X=1,\ Y=3$; se sair (3,3) obtém-se $X=3,\ Y=3$.

Função probabilidade bidimensional

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	$f_X(x)$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36	6/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36	6/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36	6/36
6	0	0	0	0	0	6/36	6/36
$f_Y(y)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1

- Funções probabilidade marginais. Por exemplo,

$$f_X(4) = P(X = 4) = f(4,4) + f(4,5) + f(4,6) = 6/36 = 1/6\,;$$

$$f_Y(5) = P(Y = 5) = f(1,5) + f(2,5) + f(3,5) + f(4,5) = 9/36 = 1/4\,.$$

- As variáveis aleatórias X e Y não são independentes. Por exemplo,

$$f(4,5) = 1/36 \neq f_X(4)\, f_Y(5) = (6/36)\times(9/36) = 1/24\,.$$

- As distribuições marginais **não** definem a distribuição conjunta. Poder-se-ia definir outra distribuição conjunta através de $h(x, y) = f_X(x)\; f_Y(y)$.
- Cálculo de probabilidades:

$$P(2 < X < 5, Y > 2) =$$

$$P(X < 3) =$$

$$P(Y > 4) =$$

- **Definição 4.8 - Função probabilidade condicionada**

  A função probabilidade de X condicionada pela realização do acontecimento $\{Y = y_j\}$, com $P(Y = y_j) > 0$, é dada por,

$$f_{X|Y}(x) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \quad (y \text{ fixo}).$$

De modo análogo, se pode definir a função probabilidade de Y condicionada pela realização do acontecimento $\{X = x_i\}$, com $P(X = x_i) > 0$, através de,

$$f_{Y|X}(y) = P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x; Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \quad (x \text{ fixo}).$$

- As funções probabilidade condicionadas gozam de todas as propriedades das f. probabilidade: $\sum_{x \in D_X} f_{X|Y=y}(x) = 1$ e $\sum_{y \in D_Y} f_{Y|X=x}(y) = 1$.

.

- Independência de variáveis aleatórias e funções probabilidade condicionadas.

$$f_{X|Y}(x) = f_X(x) \quad \text{se} \quad f_Y(y) > 0;$$
$$f_{Y|X}(y) = f_Y(y) \quad \text{se} \quad f_X(x) > 0 \quad .$$

Exemplo 4.4 – Retome-se o exemplo

- funções probabilidade condicionadas, assumindo $Y = 3$

$$f_{X|Y=3}(1) = f_{XY}(1,3) / f_Y(3) = (1/36) / (5/36) = 1/5,$$
$$f_{X|Y=3}(2) = f_{XY}(2,3) / f_Y(3) = 1/5,$$
$$f_{X|Y=3}(3|3) = f_{XY}(3,3) / f_Y(3) = 3/5,$$

Claro que

$$f_{X|Y=3}(1) + f_{X|Y=3}(2) + f_{X|Y=3}(3) = 1.$$

como é evidente, sendo $Y = 3$ o número máximo de pontos obtido no conjunto dos dois dados, no 1º dado somente podem sair 1, 2 ou 3 pontos.

- funções probabilidade condicionadas, assumindo $X = 4$

$$f_{Y|X=4}(4) = f_{X,Y}(4,4) / f_X(4) = (4/36)/(6/36) = 2/3,$$
$$f_{Y|X=4}(5) = f_{X,Y}(4,5) / f_X(4) = 1/6,$$
$$f_{Y|X=4}(6) = f_{X,Y}(4,6) / f_X(4) = 1/6.$$

obtendo-se $f_{Y|X=4}(4) + f_{Y|X=4}(5) + f_{Y|X=4}(6) = 1.$

4. Variáveis aleatórias bidimensionais contínuas

- **Definição 4.9 – Variável aleatória bidimensional contínua**

  A variável aleatória (X,Y), com função de distribuição $F_{X,Y}$, é uma variável aleatória bidimensional contínua se e só se, existe uma função real de duas variáveis reais, não negativa, $f_{X,Y}$, tal que,

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv\,.$$

  (X,Y) é uma variável aleatória bidimensional contínua se e só se, X e Y são variáveis aleatórias contínuas.

- **Definição 4.10 – Função densidade conjunta**

  A função $f_{X,Y}$, introduzida na definição anterior, chama-se função densidade (probabilidade) de (X,Y) ou função densidade conjunta de X e Y.

- Propriedades da função densidade conjunta
  - Propriedade 3 das funções de distribuição conjuntas, $F(+\infty,+\infty)=1$. Logo

$$F(+\infty,+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1,$$

  - Se $f(x,y)$ for contínua no ponto (x,y) então $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$
  - Nos pontos em que não existe segunda derivada, convenciona-se $f(x,y)=0$.

- Funções densidade marginais (definição 4.11):

  - $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$ já que $F_X(x) = F_{XY}(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(u,y)dydu$
  - $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$ já que $F_Y(y) = F_{XY}(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,u)dxdu$

Teorema 4.3 – As variáveis X e Y dizem-se independentes se e só se,

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ para todo o par } (x,y).$$

***Dem*.:** livro

Definição 4.12 – Função densidade condicionada

Seja $f_{XY}(x,y)$ a função densidade conjunta de X e Y. A função densidade de X condicionada por $Y = y$, com $f_Y(y) > 0$, é definida da seguinte maneira:

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (y \text{ fixo}).$$

De forma análoga $f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ (x fixo).

- A função densidade condicionada verifica todas as propriedades de uma função densidade de uma variável aleatória unidimensional.
- $f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x)$.

Exemplo 4.5 – Considere-se a função densidade da variável bidimensional (X,Y) dada por

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}(12/7)\,(x^2+xy) & \text{para } 0<x<1 \text{ e } 0<y<1,\\ 0 & \text{para outros } (x,y).\end{cases}$$

O cálculo das funções densidade marginais é feito através de,

$$f_X(x)=\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1(12/7)\,(x^2+xy)dy=(12x^2+6x)/7 \quad (0<x<1);$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1(12/7)\,(x^2+xy)dx=(4+6y)/7 \qquad (0<y<1).$$

Para as densidades condicionadas vem,

$$f_{X|Y}(x)=\frac{12(x^2+xy)}{4+6y} \qquad (0<x<1,\ \ y \text{ fixo e } 0<y<1);$$

$$f_{Y|X}(y)=\frac{12(x^2+xy)}{12x^2+6x} \qquad (0<y<1,\ \ x \text{ fixo e } 0<x<1).$$

Por exemplo, $f_{X|Y=2/3}(x)=(3/2)x^2+x \ \ (0<x<1)$.

5. Valor esperado e momentos de variáveis aleatórias bidimensionais

Definição 4.19 – Valor esperado de função de v.a. bidimensional

Se (X,Y) é uma variável aleatória bidimensional discreta com função probabilidade $f_{X,Y}$, e se ψ é uma função de (X,Y), a expressão

$$E\{\psi(X,Y)\} = \sum_{(x,y)\in D} \psi(x,y) f_{X,Y}(x,y)$$

$$E\{\psi(X,Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

é o valor esperado de $\psi(X,Y)$. Tal como no caso unidimensional, tem de se verificar a condição de existência do valor esperado

Teorema 4.5 – Dois resultados importantes (já enunciados)

- **Valor esperado de uma soma de v.a. –** Se (X,Y) for uma variável aleatória bidimensional e se existirem $E(X)$ e $E(Y)$, então,

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

- **Valor esperado de um produto de v.a. independentes –** Se X e Y forem variáveis aleatórias **independentes** e se existirem $E(X)$ e $E(Y)$, então,

$$E(XY)=E(X)\times E(Y).$$

Demonstrar os resultados para o caso contínuo **ou** discreto.

Exemplo 4.6 – Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional discreta com função probabilidade dada por

$X \setminus Y$	3	5	$f_1(x)$
1	0.1	0.3	0.4
2	0.4	0.2	0.6
$f_2(y)$	0.5	0.5	1

Calcular $E(X)=\mu_X$, $E(Y)=\mu_Y$, $\text{var}(X)=\sigma_X^2$, $\text{var}(Y)=\sigma_Y^2$, $E(X\,Y)$.

Exemplo 5.21 – Retome-se o exemplo 3.18,

$$f(x, y)=\frac{12}{7}(x^2+xy) \qquad\qquad 0<x<1, \quad 0<y<1.$$

Calcular $E(X)$, $E(Y)$ e $E(X\,Y)$.

Momentos em relação à origem

- **Definição 4.14 – Momentos de ordem *r+s* em relação à origem -** Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional. O valor esperado,

$$\mu'_{rs} = E(X^r Y^s),$$

define, se existir, um momento de ordem $r+s$ em relação à origem da v.a. (X,Y).

  - Caso discreto: $\mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = \sum_{(x,y)\in D} x^r y^s f_{X,Y}(x,y)$
  - Caso contínuo: $\mu'_{rs} = E(X^r Y^s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r y^s f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

- Momentos mais importantes: $r+s=1 \rightarrow E(X)$ e $E(Y)$

  $r+s=2 \rightarrow E(X^2),\ E(Y^2)$ e $E(XY)$

Momentos em relação à média

- **Definição 4.15 – Momentos de ordem (*r* + *s*) em relação à média -** Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional. O valor esperado,

$$\mu_{rs} = E\{(X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s\},$$

define, se existir, um momento de ordem $r+s$ em relação à média da v.a. (X,Y).

  - Caso discreto:

$$\mu_{rs} = E\{(X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s\} = \sum_{(x,y)\in D} (x-\mu_X)^r (y-\mu_Y)^s f_{X,Y}(x,y)$$

  - Caso contínuo:

$$\mu_{rs} = E\{(X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^r (y-\mu_Y)^s f(x,y)\,dx\,dy$$

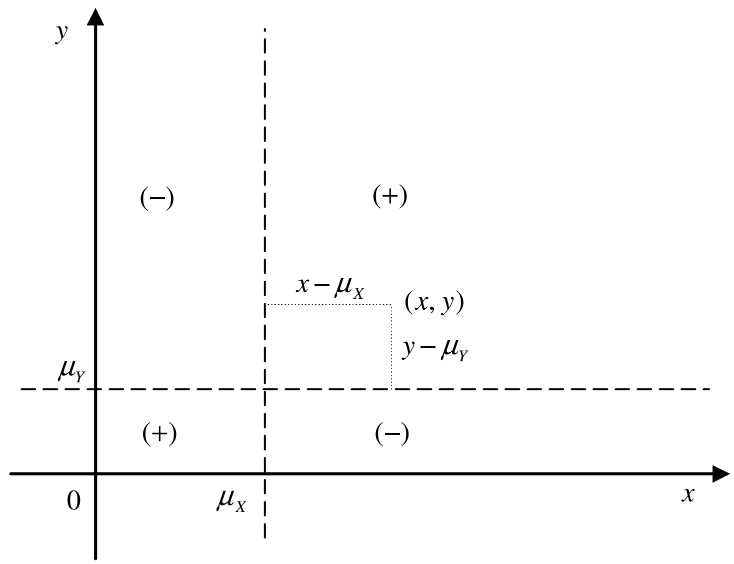
- Momentos mais importantes: $r+s=1 \rightarrow$ sempre nulos

  $r+s=2 \rightarrow$ $\text{var}(X)$, $\text{var}(Y)$ e $\text{cov}(X,Y)$

Definição 4.16 – Covariância - A covariância entre as variáveis aleatórias X e Y é,

$$\text{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right],$$ se este valor esperado existir.

Interpretação do conceito de covariância



$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$ Resultado importante

Exemplos: retomar os exemplos anteriores e calcular a covariância.

Propriedades da covariância (a, b, c são 3 constantes arbitrárias)

- $\mathrm{cov}(c, X) = E(cX) - E(c)\, E(X) = 0$
- $\mathrm{cov}(a\,X, b\,X) = a\,b\,\mathrm{cov}(X, Y)$

- Limitações do conceito de covariância na avaliação da associação entre v.a.:
    - Linearidade
    - Unidades de medida

Definição 4.17 - Coeficiente de correlação

- O coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias X e Y é dado por,

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{\text{X,Y}}}{\sigma_{\text{X}}\sigma_{Y}}.$$

- Comentários:
  - Resolve o 2º problema
  - $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$. $\rho_{X,Y} = \pm 1$ quando e só quando existe relação linear entre as variáveis.
  - Se X e Y são independentes então $\text{cov}(X,Y) = 0$. **A recíproca não é verdadeira, isto é, covariância nula não implica independência**.

- **Teorema 4.7 –** Se existem segundos momentos para as v.a. X e Y, então

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y).$$

  Em particular, se as variáveis são independentes, $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

  Demonstrar o caso geral.

- A covariância é um conceito particularmente importante na construção de carteiras de activos financeiros

- **Exemplo 4.8** – Considerem-se as v.a. X e Y, com função probabilidade conjunta

$X \backslash Y$	-1	0	1	$f_1(x)$
-1	0.00	0.25	0.00	0.25
0	0.25	0.00	0.25	0.50
1	0.00	0.25	0.00	0.25
$f_2(y)$	0.25	0.50	0.25	1.00

  Mostrar que a covariância é nula mas que as variáveis aleatórias não são independentes.

Valor esperado condicionado

- A ideia é semelhante ao que se viu anteriormente mas substituindo a f. probabilidade (densidade) pela função probabilidade (densidade) condicionada.

- **Definição 4.18** – Seja a v.a. $Z=\psi(X,Y)$, função das variáveis aleatórias discretas *X* e *Y*. O valor esperado de $Z=\psi(X,Y)$ condicionado por $X=x$, é definido por

  $$E(Z\,|\,X=x)=E\{\psi(X,Y)\,|\,X=x\}=\sum_{y\in D_Y}\psi(x,y)f_{Y|X=x}(y),$$

  se se verificar a condição habitual de existência do valor esperado.

  De modo análogo, $E(Z\,|\,Y=y)=E\{\psi(X,Y)\,|\,Y=y\}=\sum_{x\in D_X}\psi(x,y)f_{X|Y=y}(x)$.

- No caso contínuo substitui-se somatórios por integrais (e a função probabilidade condicionada pela função densidade condicionada)

Caso particular mais interessante:

- **Médias condicionais** $E(X \mid Y=y)=\mu_{X|Y}(y) \rightarrow \psi(X,Y)=X$ **e** $f_{X|Y=y}(x)$

  ou $E(Y \mid X=x)=\mu_{Y|X}(x) \rightarrow \psi(X,Y)=Y$ **e** $f_{Y|X=x}(y)$

- **Valor esperado iterado (Teorema 4.8) –** O valor esperado de $Z=\psi(X,Y)$, se existir, é igual ao valor esperado do seu valor esperado condicionado por *X*, isto é, $E(Z)=E_X\left[E_Z(Z \mid X)\right]$

  Dem. livro

- **Exemplo –** (função densidade do Exemplo 4.11)

$$f(x,y)=\frac{12}{7}(x^2+xy) \qquad 0<x<1, \quad 0<y<1.$$

  Calcular $E(X)$ directamente e pela regra do valor esperado iterado.

Directamente:

$$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x\frac{12}{7}(x^2+xy)\,dy\,dx=\int_0^1 x\frac{12}{7}\left(x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_0^1 dx$$

$$=\frac{12}{7}\int_0^1 x\left(x^2+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{12}{7}\int_0^1\left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{12}{7}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right]_0^1=\frac{12}{7}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{12}{7}\times\frac{10}{24}=\frac{5}{7}$$

Pelo valor esperado iterado

$$f_{X|Y=y}(x)=\frac{12(x^2+xy)}{4+6y} \qquad (0<x<1,\quad y \text{ fixo e } 0<y<1);$$

$$E(X\,|\,Y=y)=\frac{3+4y}{4+6y} \qquad (y \text{ fixo e } 0<y<1)$$

$$E(X)=E[E(X\,|\,Y)]=E\left[\frac{3+4Y}{4+6Y}\right]=\int_0^1\frac{3+4y}{4+6y}\,\frac{4+6y}{7}\,dy=\frac{5}{7}$$

Definição 4.19 – Variância condicionada

A variância de Y, condicionada por $X = x$, é definida por,

$$\mathrm{Var}(Y|X=x)=E\left\{[Y-E(Y|X=x)]^2 | X=x\right\}$$

Caso discreto: $\mathrm{Var}(Y|X=x)=\sum_{y\in D_Y}[y-E(Y|X=x)]^2 f_{Y|X=x}(y)$

Caso contínuo: $\mathrm{Var}(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[y-E(Y|X=x)]^2 f_{Y|X=x}(y)\,dy$

Variância marginal e momentos condicionados

- Teorema 4.9 – Se existe $E(Y^2)$ então, $\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}_X[E(Y|X)]+E_X[\mathrm{Var}(Y|X)]$
- Teorema 4.10 – A covariância de X e Y é igual à covariância de X e o valor esperado de Y condicionado por X, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}[X,E(Y|X)]$.

Definição 4.20 - Independência em média

A variável aleatória Y é independente em média da variável aleatória X se e só se,

$$E(Y \mid X = x) = E(Y) \quad \text{qualquer que seja } x.$$

A variável aleatória X é independente em média da variável aleatória Y se e só se,

$$E(X \mid Y = y) = E(X) \quad \text{qualquer que seja } y.$$